Aufgaben

1. Aufgaben und Lösungen zur Algebra

1.1. Mengen

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie jeweils die Schnittmenge $C = A \cap B$ und die Vereinigungsmenge $D = A \cup B$.

(a) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ und $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(b) $A = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36\}$ und $B = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie die Komplementärmengen $C = A \setminus B$ und $D = B \setminus A$.

(a) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ und $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(b) $A = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36\}$ und $B = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie alle Elemente, die in den folgenden Mengen M beschrieben sind.

(a) $M = \{n \mid n \text{ ist eine Quadratzahl zwischen 5 und 40}\}$

(b) $M = \{n \mid n \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl, die durch 3 teilbar und kleiner als 20 ist}\}$

(c) $M = \{n \mid n \text{ ist Teiler von 10}\}$

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie alle Elemente der Menge $D = A \setminus (B \cap C)$ mit

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $C = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

1.2. Grundrechenarten

Aufgabe 5.
Berechnen Sie.

(a) $2 - 5$	(b) $(-2) - (-3)$	(c) $-(-2) + (-2) - (-3)$
(d) $5 + (-3) - (-3)$	(e) $2 + 3 + (-5) - 5$	(f) $-(-5) + 1 + (-2)$
(g) $-(-3) + (-3)$	(h) $1 + (-16) - (-12)$	(i) $2 - 2 + (-2) - (-2)$

Aufgabe 6.
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.
Welche Klammern sind unnötig?
Hinweis:
Lösen Sie die Klammern eine um die andere von innen nach aussen (oder umgekehrt) im "Zwiebelprinzip" auf.

(a) $(3a - 4b) - (5a - 2b)$

(b) $8a - [(14a - 8b + 2c) - (8a - 12b + 2c)]$

(c) $24a - [(13a - 6b + 4c) - (9a + 12b - 3c)]$

(d) $3a - \{2a - (12a - 4x) - [2x - (3x + 3a) - 19a]\}$

(e) $(4x + 6y) - \{6x - [7y - (5x + 3y) - (6y - 8x) - 3x] - 3x\}$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgaben

Aufgabe 7.

Berechne Sie.

(a) $(4x+3)(5x+8)$ (b) $(5a+7)(8a+3)$ (c) $(3x+6)(8x-10)$

(d) $(-2x+6)(-3x+4)$ (e) $(-3a+2b)(2a+3b)$ (f) $(2a-3)(3a+4)$

(g) $(3x-y)(-2y+3)$ (h) $(4u-5v)(7u-3v)$ (i) $(-7s-3t)(2s-6t)$

Aufgabe 8.

Berechnen Sie.

(a) $(a+b)^2$ (b) $(a-b)^2$ (c) $(a+b)(a-b)$

(d) $(2a+3b)^2$ (e) $(3a-b)^2$ (f) $(2a+b)(2a-b)$

(g) $(-x+y)^2$ (h) $(-2x-3y)^2$ (i) $(2a+3b)(3b-2a)$

(j) $(-5y+8x)^2$ (k) $(-3a-5b)^2$ (l) $(8x-3y)(3y+8x)$

Aufgabe 9.

Berechnen Sie.

(a) $(x+3)^2-(x-1)^2$

(b) $(5x-3y)^2-(2x+y)^2$

(c) $(13a-11b)^2-(17a-21b)^2$

(d) $(9a-7b)^2-(2a+3b)(-3b+2a)$

Aufgabe 10.

Schreiben Sie - wenn möglich - als vollständige binomische Formel.

(a) $x^2+10x+25=(\qquad)^2$

(b) $4x^2+4xy+y^2=(\qquad)^2$

(c) $4u^2-10uv+9v^2=(\qquad)^2$

(d) $16u^2+8u+1=(\qquad)^2$

(e) $25y^2-80xy+64x^2=(\qquad)^2$

Aufgabe 11.

Ergänzen Sie zu einer vollständigen binomischen Formel.

(a) $x^2+2x+\ldots.=(\qquad)^2$

(b) $x^2-6x+\ldots.=(\qquad)^2$

(c) $x^2+x+\ldots.=(\qquad)^2$

(d) $u^2-5u+\ldots.=(\qquad)^2$

(e) $x^2-2xy+\ldots.=(\qquad)^2$

(f) $x^2-9xy+\ldots.=(\qquad)^2$

(g) $4x^2+8x+\ldots.=(\qquad)^2$

(h) $9a^2-12ab+\ldots.=(\qquad)^2$

Aufgaben

AUFGABE 12.
Schreiben Sie als Produkt von Faktoren.

(a) $x^2 - 4y^2$

(b) $9u^2 - 25v^2$

(c) $(a+b)\,x + (a+b)\,y$

(d) $(u+v)\,x - (u+v)\,y$

(e) $ax + ay + bx + by$

(f) $ab + 5a + 5b + b^2$

(g) $x^2 - ax + 2x - 2a$

(h) $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

(i) $6a^2 - 15a + 2ab - 5b$

AUFGABE 13.
Klammern Sie geeignete Faktoren aus.

(a) $2a^2 - 4ab$

(b) $a^2b + ab^2$

(c) $8a^2b^3 + 24ab^2$

(d) $x^7y^3 - 2x^5y^5$

(e) $a^{n+1}b^3 + a^nb^4$

(f) $a^{n+1}b^2 - a^{n-1}b^4$

1.3. Bruchrechnen

AUFGABE 14.
Fassen Sie die gegebenen Brüche zu einem Bruch zusammen.

(a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ (b) $\frac{-2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{-2}$

(c) $\frac{2}{13} - \frac{1}{26} + \frac{-1}{52}$ (d) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{-4} - 1$

AUFGABE 15.
Bringen Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen.

(a) $\frac{2a-b}{3} - \frac{5a-4b}{3} + \frac{18a-27b}{9}$

(b) $\frac{a-b}{2} + \frac{3a+5b}{15} - \frac{2a-7b}{20} + \frac{5b+6a}{20}$

(c) $\frac{4u-5v+8}{18} - \frac{7u+3v-5}{30} + \frac{2u-5v-3}{45}$

(d) $\frac{x+5y-7z}{15} + \frac{3x+5y-7z}{20} - \frac{2x-y+5z}{30}$

Aufgaben

Aufgabe 16.

Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzen Sie.

(a) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

(b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}$

(c) $\dfrac{x^2-1}{ax-a}$

(d) $\dfrac{ab+b}{ac+a}$

(e) $\dfrac{a^2-9}{a^2-6a+9}$

(f) $\dfrac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$

Aufgabe 17.

Bringen Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen.

(a) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}$

(b) $\dfrac{x+y}{x}-\dfrac{x}{x+y}$

(c) $\dfrac{3}{a+b}+\dfrac{6b}{a^2-b^2}+\dfrac{2}{a-b}$

(d) $\dfrac{a+2}{a-2}+\dfrac{a-2}{a+2}-\dfrac{a^2+4}{a^2-4}$

(e) $\dfrac{u-v}{u+v}-\dfrac{2\left(u^2+v^2\right)}{u^2-v^2}+\dfrac{u^2-v^2}{u^2+2uv+v^2}$

Aufgabe 18.

Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzen Sie.

(a) $\dfrac{3x}{x+y}:\dfrac{14x}{7x+7y}$

(b) $\dfrac{4(x^2-y^2)}{5(a^2-b^2)}:\dfrac{2x+2y}{5a-5b}$

(c) $\dfrac{9x^2+6x+1}{2x+1}:\dfrac{3x+1}{4x^2-1}$

(d) $\dfrac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2}:\dfrac{a-2b}{a+2b}$

(e) $\dfrac{6xy-6y^2}{5(x+y)^2}:\dfrac{9x^2-9xy}{3x+3y}$

(f) $\dfrac{12x^2y-6xy}{2a-3}:\dfrac{10x^2-5x}{2ab-3b}$

1.4. Potenzgesetze

Aufgabe 19.
Fassen Sie zusammen.

(a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^2$ (b) $(-2)^2 \cdot (-2)^5$ (c) $g^4 \cdot g^3 \cdot g^{-5}$

(d) $\dfrac{x^2 \cdot x^{-8}}{x^3 \cdot x^{-2}}$ (e) $\left(\dfrac{y^3 \cdot y}{y^{-1}}\right)^3$ (f) $\left(\dfrac{x^{-2} \cdot x}{x^{-5} \cdot x^4}\right)^{-3}$

Aufgabe 20.
Fassen Sie zusammen.

(a) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{a} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y^{-1}} : \dfrac{6 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{15 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}$

(b) $\dfrac{20 \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^2}{12 \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} : \dfrac{5 \cdot x^2 \cdot y^{-\frac{2}{7}}}{3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot b^{\frac{2}{3}}}$

Aufgabe 21.
Klammern Sie geeignete Faktoren aus.

(a) $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^3 + a^2 \cdot b^{\frac{5}{2}}$ (b) $x^{\frac{4}{3}} \cdot y^2 - 2x^2 \cdot y^{\frac{5}{3}}$ (c) $a^{\frac{2}{n}} \cdot b + a^{\frac{4}{n}} \cdot b^{\frac{n+2}{n}}$

1.5. Wurzeln

Aufgabe 22.
Schreiben Sie als Potenz mit gebrochener Hochzahl.

(a) $\sqrt[3]{x}$ (b) $\sqrt[4]{y}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

(d) $\sqrt[7]{a+b}$ (e) $\sqrt[5]{a^6}$ (f) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

Aufgabe 23.
Vereinfachen Sie.

(a) $\sqrt[4]{a^8}$ (b) $\sqrt[16]{a^{8n}}$ (c) $\left(\sqrt[6]{a^2}\right)^3$

(d) $\sqrt{\sqrt{a}}$ (e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$ (f) $\left(\sqrt[5]{\left(\sqrt[4]{a^{20}}\right)}\right)^2$

Aufgabe 24.
Machen Sie den Nenner rational (wurzelfrei).

(a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ (c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ (e) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}$

Aufgabe 25.
Fassen Sie zusammen (mit $a > 0$ und $b > 0$).

(a) $12\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{8} + \sqrt{32}$ (c) $\sqrt{36} - \sqrt{25}$

(d) $2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16}$ (e) $2\sqrt{ab} - \sqrt{ab}$ (f) $2\sqrt[3]{a^4} + 4a\sqrt[3]{a}$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

1.6. Logarithmengesetze

Aufgabe 26.
Zerlegen Sie in Logarithmen von Primzahlen.

(a) $\ln 120$ (b) $\ln 1,44$ (c) $\ln 0,04$

Aufgabe 27.
Formen Sie den Term mit Hilfe der Logarithmengesetze in einen gleichwertigen Logarithmusterm um.

(a) $\ln\left(\frac{b^2c}{ad^{-2}}\right)$ (b) $-3\ln r - \ln p + 2\ln q$ (c) $\frac{2}{5}\ln x - \frac{1}{2}\ln y$

(d) $\ln\sqrt[3]{x^4y^2z}$ (e) $\ln(r\sqrt{p})$ (f) $\ln(x^0)$

1.7. Termumformungen

Aufgabe 28.
Formen Sie den Term in einen gleichwertigen Term um.

(a) $12r^3s^2 \cdot (-\frac{2}{3}rs^3t^4)$

(b) $(-2a^2b^3)(-\frac{2}{5}a^3b^2)$

(c) $(-x)^{2n+1} \cdot (-3) \cdot (-x)^{n-2} \cdot (-x)^2$

Aufgabe 29.
Lösen Sie nach x auf und bestimmen Sie, für welche y Lösungen existieren.

(a) $\frac{1}{3}x + 1 = 4 - \frac{1}{2}y$ (b) $x - 1 = \frac{1}{y} + 2$ (c) $\frac{2}{x} = \frac{3}{y} + \frac{1}{4}$

(d) $\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 7$ (e) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{5y} + 2$ (f) $\frac{2}{3x} - \frac{3}{4y} = \frac{3}{2x} + \frac{4}{3y} - \frac{4}{3}$

Aufgabe 30.
Hier einige Gleichungen aus der Physik. Lösen Sie jeweils nach der/den gefragte(n) Größe(n) auf.

(a) Lösen Sie nach t und a auf.
$v = v_0 - at$

(b) Lösen Sie nach t auf.
$s = \frac{1}{2}gt^2$

(c) Lösen Sie nach a auf.
$m_1g + m_1a - m_2g + m_2a = 0$

(d) Lösen Sie nach x auf.
$m_B\frac{L}{2} = m_M(L - x) + m_B(\frac{L}{2} - x)$

(e) Lösen Sie nach a auf.
$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g - \frac{J}{r^2}a$

(f) Lösen Sie nach x auf.
$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_E^2$

(g) Lösen Sie nach p_2, V_1 und κ auf.
$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$

(h) Lösen Sie nach A_2, A_1 und v_1 auf.
$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

2. Elementare Funktionen

2.1. Grundlagen

AUFGABE 31.
Berechnen Sie wahlweise mit Hilfe der Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas.

(a) $(x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}) : (x + \frac{1}{2})$

(b) $(4x^5 - 6x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 - x - 1)$

(c) $(2x^4 + 2\sqrt{2}\,x^3 - x^2 + (1 - \sqrt{2})\,x + \sqrt{2}) : (x + \sqrt{2})$

AUFGABE 32.
Fassen Sie folgende Intervalle zu einem Intervall zusammen.

(a) $(-2;\ 5] \cap [3;\ \infty)$

(b) $(-2;\ 2] \cup (2;\ 8) \cup [3;\ 9)$

(c) $(-\infty;\ -3] \cap (-1;\ 4]$

2.2. Funktionen

AUFGABE 33.
Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$ und zerlegen Sie soweit wie möglich in Linearfaktoren und skizzieren Sie.

(a) $f(x) = x^3 - 13x + 12$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

(c) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

(d) $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$

(e) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

(f) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4$

(g) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x$

AUFGABE 34.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels S der Parabel $f(x)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

(b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{5}{4}$

(c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

AUFGABE 35.
Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Parabel $f(x) = x^2 + bx + 3$ den Scheitel

(a) $S(0/y_s)$,

(b) $S(-1/y_s)$,

(c) $S(\frac{4}{3}/y_s)$ besitzt.

AUFGABE 36.
Bestimmen Sie den Grad, den Gradfaktor und die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(8-x)$

(b) $f(x) = -2(x^2+1)(2+x)(x-2)$

(c) $f(x) = 3x^2(x^2+4)(x-1)$

AUFGABE 37.
Geben Sie eine echt gebrochenrationale Funktion an, die $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ als Nullstellen sowie $x_3 = 5$ als Pol mit Vorzeichenwechsel und $x_4 = -3$ als Pol ohne Vorzeichenwechsel hat.

AUFGABE 38.
Skizzieren Sie die Schaubilder der folgenden Funktionen. Bestimmen Sie dazu den Definitionsbereich und alle Nullstellen, Pole, mögliche hebbare Stetigkeitslücken und die Asymptoten.

(a) $f(x) = -2\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

(c) $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2-1}$

AUFGABE 39.
Schreiben Sie ohne Betragstriche und skizzieren Sie.

(a) $f(x) = |2x-3|$

(b) $f(x) = |-3x+5| - 4$

(c) $f(x) = |-x-3| - |2x+3| - 4$

2.3. Verschiebung, Symmetrie und Spiegelung

AUFGABE 40.
Wie lauten die Gleichungen der Kurven $f^*(x)$, $g^*(x)$ und $h^*(x)$, die entstehen, wenn man die Kurven der Funktionen $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ und $h(x) = \sin x$

(a) in Richtung der negativen y-Achse um 3 verschiebt?

(b) in Richtung der positiven x-Achse um 4 verschiebt?

(c) um 2 nach rechts und 3 nach oben verschiebt?

AUFGABE 41.

(a) Zeigen Sie, dass das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 1$ achsensymmetrisch zur Geraden $x = 2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(1/1)$ ist.

AUFGABE 42.
Wie lautet die Gleichung $f^*(x)$ der Kurve, die entsteht, wenn man die Kurve der Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 3$

(a) an der Geraden $y = 2$ spiegelt?

(b) an der Geraden $x = -1$ spiegelt?

(c) am Punkt $P(2/-2)$ spiegelt?

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

2.4. Gleichungen

Aufgabe 43.
Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen mit der Mitternachtsformel oder vielleicht sogar einfacher.

(a) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

(b) $-\frac{2}{7}x^2 + 3 = 0$

(c) $4x^2 - 2x = 0$

Aufgabe 44.
Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung $ax^2 - 4x + 2 = 0$ keine, eine bzw. zwei Lösungen besitzt.

Aufgabe 45.
Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen mit einer geeigneten Substitution.

(a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(b) $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$

(c) $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$

(d) $\left(x^3 + 2\right)^2 + 3\left(x^3 + 2\right) - 18 = 0$

Aufgabe 46.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Bruchgleichungen.

(a) $\frac{8}{2x-4} + \frac{24}{2x+4} = \frac{\frac{9}{2}}{(x-2)(x+2)}$

(b) $\frac{3x}{x+1} + \frac{5}{x} = 3$

(c) $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{12}{x^2-4}$

(d) $\frac{b(a-2x)}{ax} + \frac{a}{b} = \frac{a(a-x)}{bx}$

Aufgabe 47.
Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsgleichungen.

(a) $|x| + 3x = 8$

(b) $|2x - 1| + 1 = |6 - x|$

(c) $|x + 2| - 3 = 2 \cdot |4 - x|$

Aufgabe 48.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Wurzelgleichungen.

(a) $2\sqrt{x-1} = -4 + 2x$

(b) $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{1-x}$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgaben

AUFGABE 49.
Bestimmen Sie - falls möglich - die Lösungsmenge der folgenden trigonometrischen Gleichungen.

(a) $5\sin x - 2 = 3$

(b) $2\cos(2x-3) = -3$

(c) $\sin x - \cos x = 0$

(d) $\sin^2 x + 2\sin x = -1$

AUFGABE 50.
Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

(a) $e^{3x} = 2$ (b) $e^{2x-1} = 4$ (c) $2e^{x^2} = 6$

(d) $-3e^{-x+5} = 3$ (e) $e^x(1-e^x) = 0$ (f) $2e^{2x} - e^x = 0$

AUFGABE 51.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Logarithmusgleichungen.

(a) $\ln(2x) = -2$ (b) $\ln(3-x) = 1$ (c) $\ln(e^x) = -3$

(d) $\ln x - 2\ln(x^2) = 3$ (e) $\ln x(\ln x - 1) = 0$ (f) $\ln(\frac{1}{x-1}) = 2$

2.5. Ungleichungen

AUFGABE 52.
Bestimmen Sie die Definitionsmenge und berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen.

(a) $4x - 3 < 3(x+1)$

(b) $x^2 - 15 < (x+5)^2$

(c) $2\left(x^2 - 16\right) > 2x^2 + 14x - 4$

(d) $\dfrac{2x-2}{2x+2} \leq 2$

AUFGABE 53.
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender quadratischer Ungleichungen.

(a) $x^2 - 3x - 4 > 0$

(b) $\frac{1}{2}x^2 + x \leq 4$

Vollbild

<< >>

< >

Beenden

3. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

3.1. Quadratisches LGS (gleich viele Gleichungen wie Unbekannte)

AUFGABE 54.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

AUFGABE 55.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

AUFGABE 56.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -3 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

3.2. Überbesetztes LGS (mehr Gleichungen alsUnbekannte)

AUFGABE 57.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ 6x_1 - x_2 &= 11 \end{aligned}$$

AUFGABE 58.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 12 \\ -5x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= -20 \end{aligned}$$

AUFGABE 59.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3.3. Unterbesetztes LGS (weniger Gleichungen als Unbekannte)

AUFGABE 60.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 \phantom{{}+x_4} &= -2 \end{aligned}$$

AUFGABE 61.
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -8x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen zu den Aufgaben

Aufgabe 1:
Praktisches Vorgehen
Um die Schnittmenge zu bestimmen, schreibt man alle Elemente, die in beiden Mengen vorkommen in die Schnittmenge.
Um die Vereinigungsmenge zu bestimmen, schreibt man alle Elemente beider Mengen in die Vereinigungsmenge und stricht die doppelt vorkommenden Elemente.

(a) Die Schnittmenge ist
$C = A \cap B = \{2,\ 4,\ 6\}$
Die Vereinigungsmenge ist
$D = A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$

(b) Die Schnittmenge ist
$C = A \cap B = \{25\}$
Die Vereinigungsmenge ist
$D = A \cup B = \{1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 10,\ 15,\ 16,\ 20,\ 25,\ 30,\ 36\}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 2:
Praktisches Vorgehen
Um die Komplementärmenge $C = A \setminus B$ zu bestimmen, nimmt man aus A alle Elemente von B heraus und schreibt die übrigbleibenden Elemente in die Komplementärmenge.
Um die Komplementärmenge $D = B \setminus A$ zu bestimmen, nimmt man aus B alle Elemente von A heraus und schreibt die übrigbleibenden Elemente in die Komplementärmenge.

(a) Die Komplementärmenge $C = A \setminus B$ ist
$C = A \setminus B = \{1,\ 3,\ 5\}$
Die Komplementärmenge $D = B \setminus A$ ist
$D = B \setminus A = \{8,\ 10\}$

(b) Die Komplementärmenge $C = A \setminus B$ ist
$C = A \setminus B = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 36\}$
Die Komplementärmenge $D = B \setminus A$ ist
$D = B \setminus A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 30\}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 3:

(a) $M = \{9,\ 16,\ 25,\ 36\}$

(b) $M = \{3,\ 9,\ 15\}$

(c) $M = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 4:
Zuerst bestimmt man die Schnittmenge $B \cap C = \{4,\ 5\}$ und nimmt diese Elemente aus A heraus
$D = A \setminus (B \cap C) = \{2,\ 6,\ 8,\ 10\}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

Lösungen

Aufgabe 5:
Praktisches Vorgehen
Zuerst löst man alle vorhandenen Klammern auf und berechnet den entstehenden klammerfreien Term.

(a) $2 - 5 = -3$

(b) $(-2) - (-3) = -2 + 3 = 1$

(c) $-(-2) + (-2) - (-3) = 2 - 2 + 3 = 3$

(d) $5 + (-3) - (-3) = 5 - 3 + 3 = 5$

(e) $2 + 3 + (-5) - 5 = 2 + 3 - 5 - 5 = -5$

(f) $-(-5) + 1 + (-2) = 5 + 1 - 2 = 4$

(g) $-(-3) + (-3) = 3 - 3 = 0$

(h) $1 + (-16) - (-12) = 1 - 16 + 12 = -3$

(i) $2 - 2 + (-2) - (-2) = 2 - 2 - 2 + 2 = 0$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 6:
Praktisches Vorgehen
"Plusklammern" können weggelassen werden und
"Minusklammern" werden aufgelöst, indem man die Vorzeichen in den jeweiligen Klammern umdreht.
$+(a+b) = a+b$ man kann dies interpretieren als Ausmultiplizieren der Klammer mit dem Faktor $+1$, also
$+(a+b) = (+1)\cdot(a+b) = (+1)\cdot a + (+1)\cdot b = a+b$
$-(a+b) = -a-b$ man kann dies interpretieren als Ausmultiplizieren der Klammer mit dem Faktor -1, also
$-(a+b) = (-1)\cdot(a+b) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot b = -a+(-b) = -a-b$

(a) $(3a-4b)-(5a-2b) = 3a-4b-5a+2b$
$= -2a-2b$

(b) $8a-[(14a-8b+2c)-(8a-12b+2c)]$
$= 8a-(14a-8b+2c)+(8a-12b+2c)$
$= 8a-14a+8b-2c+8a-12b+2c$
$= 2a-4b$

(c) $24a-[(13a-6b+4c)-(9a+12b-3c)]$
$= 24a-(13a-6b+4c)+(9a+12b-3c)$
$= 24a-13a+6b-4c+9a+12b-3c$
$= 20a+18b-7c$

(d) $3a-\{2a-(12a-4x)-[2x-(3x+3a)-19a]\}$
$= 3a-2a+(12a-4x)+[2x-(3x+3a)-19a]$
$= 3a-2a+12a-4x+2x-3x-3a-19a$
$= -9a-5x$

(e) $(4x+6y)-\{6x-[7y-(5x+3y)-(6y-8x)-3x]-3x\}$
$= 4x+6y-6x+[7y-(5x+3y)-(6y-8x)-3x]+3x$
$= 4x+6y-6x+7y-5x-3y-6y+8x-3x+3x$
$= x+4y$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 7:
Praktisches Vorgehen
Das Ausmultiplizieren erfolgt durch die Regel
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
und anschließendem Zusammenfassen gleichartiger Terme.

(a) $(4x+3)\,(5x+8) = 20x^2 + 32x + 15x + 24 = 20x^2 + 47x + 24$

(b) $(5a+7)\,(8a+3) = 40a^2 + 15a + 56a + 21 = 40a^2 + 71a + 21$

(c) $(3x+6)\,(8x-10) = 24x^2 - 30x + 48x - 60 = 24x^2 + 18x - 60$

(d) $(-2x+6)\,(-3x+4) = 6x^2 - 8x - 18x + 24 = 6x^2 - 26x + 24$

(e) $(-3a+2b)\,(2a+3b) = -6a^2 - 9ab + 4ab + 6b^2 = -6a^2 + 6b^2 - 5ab$

(f) $(2a-3)\,(3a+4) = 6a^2 + 8a - 9a - 12 = 6a^2 - a - 12$

(g) $(3x-y)\,(-2y+3) = -6xy + 9x + 2y^2 - 3y = 9x - 3y - 6xy + 2y^2$

(h) $(4u-5v)\,(7u-3v) = 28u^2 - 12uv - 35uv + 15v^2 = 28u^2 - 47uv + 15v^2$

(i) $(-7s-3t)\,(2s-6t) = -14s^2 + 42st - 6st + 18t^2 = -14s^2 + 36st + 18t^2$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 8:
Praktisches Vorgehen
Es handelt sich hierbei um die sogenannten binomischen Formeln. Durch deren Anwendung erspart man sich das Ausmultiplizieren.
Sind Sie jedoch unsicher in deren Anwendung, so können Sie einen Umweg über das Ausmultiplizieren machen.
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(-a-b)^2 = (-a-b)(-a-b) = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
und verfahren wie in voriger Aufgabe.

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(d) $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

(e) $(3a-b)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$

(f) $(2a+b)(2a-b) = 4a^2 - b^2$

(g) $(-x+y)^2 = (y-x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$

(h) $(-2x-3y)^2 = (2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(i) $(2a+3b)(3b-2a) = (3b+2a)(3b-2a) = 9b^2 - 4a^2$

(j) $(-5y+8x)^2 = (8x-5y)^2 = 64x^2 - 80xy + 25y^2$

(k) $(-3a-5b)^2 = (3a+5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$

(l) $(8x-3y)(3y+8x) = (8x-3y)(8x+3y) = 64x^2 - 9y^2$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 9:
Praktisches Vorgehen
Nach der alten Algebra-Regel "Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich" - erst die binomischen Formeln ausmultiplizieren und danach gleichartige Terme zusammenfassen.

(a) $(x+3)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 2x + 1)$
$= 8x + 8$

(b) $(5x-3y)^2 - (2x+y)^2 = 21x^2 - 34xy + 8y^2$

(c) $(13a-11b)^2 - (17a-21b)^2 = 428ab - 120a^2 - 320b^2$

(d) $(9a-7b)^2 - (2a+3b)(-3b+2a) = 77a^2 - 126ab + 58b^2$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 10:
Praktisches Vorgehen
Dies erfolgt durch Faktorisieren (binomische Formeln rückwärts) und anschließender Probe.
$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(a) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

(b) $4x^2 + 4xy + y^2 = (2x + y)^2$

(c) $4u^2 - 10uv + 9v^2$ nicht faktorisierbar

(d) $16u^2 + 8u + 1 = (4u + 1)^2$

(e) $25y^2 - 80xy + 64x^2 = (5y - 8x)^2$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 11:
Praktisches Vorgehen
Ergänzen zu einer vollständigen binomischen Formel für $a > 0$ erfolgt nach folgender Regel:
$ax^2 \pm bx + ... = (\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 = ax^2 + bx + \frac{1}{4a}b^2$

(a) $x^2 + 2x + ... = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

(b) $x^2 - 6x + ... = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

(c) $x^2 + x + ... = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

(d) $u^2 - 5u + ... = \left(u-\frac{5}{2}\right)^2 = u^2 - 5u + \frac{25}{4}$

(e) $x^2 - 2xy + ... = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(f) $x^2 - 9xy + ... = (x - \frac{9}{2}y)^2 = x^2 - 9xy + \frac{81}{4}y^2$

(g) $4x^2 + 8x + ... = (2x+2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$

(h) $9a^2 - 12ab + ... = (3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

◄ zurück zur Aufgabe

Aufgabe 12:
Praktisches Vorgehen
Eine Faktorisierung erfolgt durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren und anschließender evtl. binomischer Formeln "rückwärts" oder umgekehrt.

(a) $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$

(b) $9u^2 - 25v^2 = (3u - 5v)(3u + 5v)$

(c) $(a + b)x + (a + b)y = (x + y)(a + b)$

(d) $(u + v)x - (u + v)y = (x - y)(u + v)$

(e) $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$

(f) $ab + 5a + 5b + b^2 = (b + 5)(a + b)$

(g) $x^2 - ax + 2x - 2a = (x + 2)(x - a)$

(h) $6x^2 + 3xy - 2ax - ay = (a - 3x)(-2x - y) = -(a - 3x)(2x + y)$

(i) $6a^2 - 15a + 2ab - 5b = (2a - 5)(3a + b)$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 13:
Praktisches Vorgehen
Suchen des kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der einzelnen Terme (Summanden/Subtrahenden) und dieses Ausklammern oder die binomischen Formeln rückwärts anwenden.

(a) $2a^2 - 4ab = 2a\,(a - 2b)$

(b) $a^2b + ab^2 = ab\,(a + b)$

(c) $8a^2b^3 + 24ab^2 = 8ab^2\,(ab + 3)$

(d) $x^7y^3 - 2x^5y^5 = x^5y^3(x^2 - 2y^2) = x^5y^3(x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y)$

(e) $a^{n+1}b^3 + a^nb^4 = a^nb^3\,(a + b)$

(f) $a^{n+1}b^2 - a^{n-1}b^4 = a^{n-1}b^2\left(a^2 - b^2\right) = a^{n-1}b^2\,(a + b)\,(a - b)$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 14:

Praktisches Vorgehen

Zuerst entfernt man alle negativen Vorzeichen in den einzelnen Brüchen. Danach bringt man alle Brüche auf den Hauptnenner und fasst anschließend zusammen und kürzt - wenn möglich.

(a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 6}{12}+\frac{2\cdot 4}{12}-\frac{1\cdot 3}{12}=\frac{6}{12}+\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$

(b) $\frac{-2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{-2}=-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=-\frac{2\cdot 10}{30}+\frac{4\cdot 6}{30}+\frac{1\cdot 15}{30}=-\frac{20}{30}+\frac{24}{30}+\frac{15}{30}=\frac{19}{30}$

(c) $\frac{2}{13}-\frac{1}{26}+\frac{-1}{52}=\frac{2}{13}-\frac{1}{26}-\frac{1}{52}=\frac{2\cdot 4}{52}-\frac{1\cdot 2}{52}-\frac{1}{52}=\frac{8}{52}-\frac{2}{52}-\frac{1}{52}=\frac{5}{52}$

(d) $\frac{-2}{3}+\frac{-1}{-4}-1=-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-1=-\frac{2\cdot 4}{12}+\frac{1\cdot 3}{12}-\frac{12}{12}=-\frac{8}{12}+\frac{3}{12}-\frac{12}{12}=-\frac{17}{12}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 15:
Praktisches Vorgehen
Es handelt sich hierbei um Additionen (Subtraktionen) von Brüchen, deshalb muss man den Hauptnenner suchen. Dieser ergibt sich aus dem kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der jeweilig an der Summe (Differenz) beteiligten Nenner - hier muss beim Erweitern der Summanden (Subtrahenden) jedoch auf den Zähler aufgepasst werden (diesen setzt man in Klammern). Nach dem Erweitern muss der Zähler jeweils ausmultipliziert werden und es muss zusätzlich auf die Vorzeichen der Zählerklammern geachtet werden.

(a) $\frac{2a-b}{3} - \frac{5a-4b}{3} + \frac{18a-27b}{9} = \frac{2a-b}{3}\frac{3}{3} - \frac{5a-4b}{3}\frac{3}{3} + \frac{18a-27b}{9}$
$\frac{3(2a-b)-3(5a-4b)+18a-27b}{9} = \frac{6a-3b-15a+12b+18a-27b}{9}$
$= a-2b$

(b) $\frac{a-b}{2} + \frac{3a+5b}{15} - \frac{2a-7b}{20} + \frac{5b+6a}{20}$
$= \frac{9}{10}a + \frac{13}{30}b$

(c) $\frac{4u-5v+8}{18} - \frac{7u+3v-5}{30} + \frac{2u-5v-3}{45}$
$= \frac{1}{30}u - \frac{22}{45}v + \frac{49}{90}$

(d) $\frac{x+5y-7z}{15} + \frac{3x+5y-7z}{20} - \frac{2x-y+5z}{30}$
$= \frac{3}{20}x + \frac{37}{60}y - \frac{59}{60}z$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 16:
Praktisches Vorgehen
Separates Faktorisieren des Zählers und Nenners und anschließendes Kürzen.

(a) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x-1}$

(b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \dfrac{x+1}{x}$

(c) $\dfrac{x^2-1}{ax-a} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{a(x-1)} = \dfrac{x+1}{a}$

(d) $\dfrac{ab+b}{ac+a} = \dfrac{b(a+1)}{a(c+1)}$

(e) $\dfrac{a^2-9}{a^2-6a+9} = \dfrac{(a+3)(a-3)}{(a-3)^2} = \dfrac{a+3}{a-3}$

(f) $\dfrac{2x^2-xy}{4x^2-y^2} = \dfrac{x(2x-y)}{(2x+y)(2x-y)} = \dfrac{x}{2x+y}$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 17:
Praktisches Vorgehen
Bestimmen Sie den Hauptnenner und vereinfachen Sie damit die Summe der Brüche auf einen Bruch. Verfahren Sie danach weiter, wie in voriger Aufgabe.

(a) $\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a-b} = -2\dfrac{b}{a^2-b^2} = 2\dfrac{b}{b^2-a^2}$

(b) $\dfrac{x+y}{x} - \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{y(2x+y)}{x(x+y)}$

(c) $\dfrac{3}{a+b} + \dfrac{6b}{a^2-b^2} + \dfrac{2}{a-b} = \dfrac{5}{a-b}$

(d) $\dfrac{a+2}{a-2} + \dfrac{a-2}{a+2} - \dfrac{a^2+4}{a^2-4} = \dfrac{a^2+4}{a^2-4}$

(e) $\dfrac{u-v}{u+v} - \dfrac{2\left(u^2+v^2\right)}{u^2-v^2} + \dfrac{u^2-v^2}{u^2+2uv+v^2} = -\dfrac{4uv}{u^2-v^2} = \dfrac{4uv}{v^2-u^2}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 18:
Praktisches Vorgehen
Umschreiben des Doppelbruchs nach der Regel
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
und dann verfahren wie in den vorigen Aufgaben.

(a) $\frac{3x}{x+y} : \frac{14x}{7x+7y} = \frac{3x}{x+y} \cdot \frac{7(x+y)}{14x} = \frac{3}{2}$

(b) $\frac{4(x^2-y^2)}{5(a^2-b^2)} : \frac{2x+2y}{5a-5b} = \frac{4(x+y)(x-y)}{5(a+b)(a-b)} \cdot \frac{5(a-b)}{2(x+y)} = \frac{2(x-y)}{a+b}$

(c) $\frac{9x^2+6x+1}{2x+1} : \frac{3x+1}{4x^2-1} = \frac{(3x+1)^2}{2x+1} \cdot \frac{(2x+1)(2x-1)}{3x+1} = 6x^2-x-1$

(d) $\frac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2} : \frac{a-2b}{a+2b} = \frac{(a+2b)(a-2b)}{(a+2b)^2} \cdot \frac{a+2b}{a-2b} = 1$

(e) $\frac{6xy-6y^2}{5(x+y)^2} : \frac{9x^2-9xy}{3x+3y} = \frac{6y(x-y)}{5(x+y)^2} \cdot \frac{3(x+y)}{9x(x-y)} = \frac{2y}{5x(y+x)}$

(f) $\frac{12x^2y-6xy}{2a-3} : \frac{10x^2-5x}{2ab-3b} = \frac{6xy(2x-1)}{2a-3} \cdot \frac{b(2a-3)}{5x(2x-1)} = \frac{6}{5}by$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 19:
Praktisches Vorgehen
Benutzen der Potenzgesetze.

(a) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^2 = 2^{3+5+2} = 2^{10}$

(b) $(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^{2+5} = (-2)^7 = -2^7$

(c) $g^4 \cdot g^3 \cdot g^{-5} = g^{4+3+(-5)} = g^{4+3-5} = g^2$

(d) $\dfrac{x^2 \cdot x^{-8}}{x^3 \cdot x^{-2}} = x^{2+(-8)-3-(-2)} = x^{2-8-3+2} = x^{-7}$

(e) $\left(\dfrac{y^3 \cdot y}{y^{-1}}\right)^3 = \left(y^{3+1-(-1)}\right)^3 = \left(y^{3+1+1}\right)^3 = \left(y^5\right)^3 = y^{15}$

(f) $\left(\dfrac{x^{-2} \cdot x}{x^{-5} \cdot x^4}\right)^{-3} = \left(x^{-2+1-(-5)-4}\right)^{-3} = \left(x^{-2+1+5-4}\right)^{-3} = \left(x^0\right)^{-3} = x^0 = 1$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 20:
Praktisches Vorgehen
Lösen Sie den Doppelbruch auf und fassen Sie dann Zähler und Nenner mit Hilfe der Potenzgesetze zusammen und kürzen Sie anschließend.

(a) $$\frac{2\sqrt{a}\cdot b^{-\frac{1}{2}}}{5\cdot\sqrt[3]{x}\cdot y^{-1}} : \frac{6\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}{15\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}}{5\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-1}}\cdot\frac{15\cdot a^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{-\frac{2}{3}}}{6\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}} = b^{-\frac{7}{6}}x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{3}{2}}$$

(b) $$\frac{20\cdot a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{2}}{12\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}} : \frac{5\cdot x^{2}\cdot y^{-\frac{2}{7}}}{3\cdot\sqrt[3]{a^{2}}\cdot b^{\frac{2}{3}}} = \frac{20\cdot a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{2}}{12\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{3\cdot\sqrt[3]{a^{2}}\cdot b^{\frac{2}{3}}}{5\cdot x^{2}\cdot y^{-\frac{2}{7}}} = b^{\frac{8}{3}}x^{-\frac{11}{4}}y^{\frac{11}{14}}$$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 21:
Praktisches Vorgehen
Suchen des kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der einzelnen Terme (Summanden/Subtrahenden) und dieses Ausklammern.

(a) $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^3 + a^2 \cdot b^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}} (\sqrt{b} + \sqrt{a})$

(b) $x^{\frac{4}{3}} \cdot y^2 - 2x^2 \cdot y^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{5}{3}} (y^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}})$

(c) $a^{\frac{2}{n}} \cdot b + a^{\frac{4}{n}} \cdot b^{\frac{n+2}{n}} = a^{\frac{2}{n}} \cdot b(1 + a^{\frac{2}{n}} \cdot b^{\frac{2}{n}})$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 22:
Praktisches Vorgehen
Zum Umschreiben einer Wurzel in eine Potenz benützen Sie für die Lösung die folgende Formel
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(a) $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

(b) $\sqrt[4]{y} = y^{\frac{1}{4}}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}}$

(d) $\sqrt[7]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{7}}$

(e) $\sqrt[5]{a^6} = a^{\frac{6}{5}}$

(f) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{3}{x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{-\frac{2}{3}}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

Lösungen

Aufgabe 23:
Praktisches Vorgehen
Verfahren Sie wie in der vorigen Aufgabe und benützen Sie die Potenzgesetze
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

(a) $\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2$

(b) $\sqrt[16]{a^{8n}} = a^{\frac{8n}{16}} = a^{\frac{n}{2}}$

(c) $\left(\sqrt[6]{a^2}\right)^3 = \left(a^{\frac{2}{6}}\right)^3 = a$

(d) $\sqrt{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

(e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}}$

(f) $\left(\sqrt[5]{\left(\sqrt[4]{a^{20}}\right)}\right)^2 = \left(\left(a^{\frac{20}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = a^2$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 24:

(a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-1} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x-y}$

(f) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5}+3\sqrt{3})} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{20-27}$
$= -\dfrac{10+3\sqrt{15}-2\sqrt{15}-9}{7} = -\dfrac{1+\sqrt{15}}{7}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 25:
Praktisches Vorgehen
Addition/Subtraktion von Wurzeln funktioniert nur, wenn die jeweiligen Radikanden gleich sind. Sind diese verschieden, so kann man den ein oder anderen Radikanden eventuell durch teilweises radizieren angleichen.

(a) $12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{8} + \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{8} + 2\sqrt{8} = 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{36} - \sqrt{25} = 6 - 5 = 1$

(d) $2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} = -8\sqrt[3]{2}$

(e) $2\sqrt{ab} - \sqrt{ab} = \sqrt{ab}$

(f) $2\sqrt[3]{a^4} + 4a\sqrt[3]{a} = 2\sqrt[3]{a^3 \cdot a} + 4a\sqrt[3]{a} = 2a\sqrt[3]{a} + 4a\sqrt[3]{a} = 6a\sqrt[3]{a}$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 26:
Praktisches Vorgehen
Zerlegen Sie das Argument des Logarithmus in Primfaktoren und benutzen Sie anschließend die Logarithmengesetze.

(a) $\ln 120 = \ln(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 2\ln 2 + \ln 3 + \ln 5$

(b) $\ln 1,44 = \ln(\frac{144}{100}) = \ln(\frac{2^4 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 5^2}) = \ln(\frac{2^2 \cdot 3^2}{5^2}) = 2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 5$

(c) $\ln 0,04 = \ln(\frac{4}{100}) = \ln(\frac{2^2}{2^2 \cdot 5^2}) = \ln(\frac{1}{5^2}) = \ln 1 - 2\ln 5 = -2\ln 5$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 27:
Praktisches Vorgehen
Benutzen Sie die Logarithmengesetze.

(a) $\ln\left(\frac{b^2c}{ad^{-2}}\right) = 2\ln b + \ln c - \ln a - (-2)\ln d = 2\ln b + \ln c - \ln a + 2\ln d$

(b) $-3\ln r - \ln p + 2\ln q = \ln\left(\frac{q^2}{r^3p}\right)$

(c) $\frac{2}{5}\ln x - \frac{1}{2}\ln y = \ln\left(\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt{y}}\right)$

(d) $\ln\sqrt[3]{x^4y^2z} = \ln(x^{\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{1}{3}}) = \frac{4}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln y + \frac{1}{3}\ln z$

(e) $\ln(r\sqrt{p}) = \ln r + \frac{1}{2}\ln p$

(f) $\ln(x^0) = \ln 1 = 0$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 28:
Praktisches Vorgehen
Mit Hilfe der Potenzgesetze gleiche Buchstaben zusammenfassen und danach alphabetisch sortieren.

(a) $12r^3s^2 \cdot (-\frac{2}{3}rs^3t^4) = -8r^4s^5t^4$

(b) $(-2a^2b^3)(-\frac{2}{5}a^3b^2) = \dfrac{4}{5}a^5b^5$

(c) $(-x)^{2n+1} \cdot (-3) \cdot (-x)^{n-2} \cdot (-x)^2 = -3\,(-x)^{3n+1}$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 29:
Praktisches Vorgehen
Lösen Sie nach x auf, in dem Sie die passenden Regeln der Algebra (Äquivalenzumformungen) anwenden und den Definitionsbereich der Variablen x und y festlegen und anschließend kontrollieren, für welche y überhaupt eine Lösung existiert.

(a) $\frac{1}{3}x + 1 = 4 - \frac{1}{2}y$
Definitionsbereich: $x,\ y \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{3}x = 3 - \frac{1}{2}y$
$\Longrightarrow\ x = 9 - \frac{3}{2}y$
Es existiert eine Lösung für $y \in \mathbb{R}$.

(b) $x - 1 = \dfrac{1}{y} + 2$
Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R},\ y \neq 0$
$\Longrightarrow\ x = \dfrac{1}{y} + 3$
Es existiert nur eine Lösung für $y \neq 0$.

(c) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{4}$
Definitionsbereich: $x \neq 0,\ y \neq 0$
$\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2y} + \dfrac{1}{8}$
$\Longrightarrow\ x = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2y} + \dfrac{1}{8}} = \dfrac{8y}{y+12}$
Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; -12\}$.

(d) $\dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} = 7$
Definitionsbereich: $x \neq 0,\ y \neq 0$
$\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{5y} + \dfrac{7}{5}$
$\Longrightarrow\ x = \dfrac{1}{\dfrac{3}{5y} + \dfrac{7}{5}} = \dfrac{5y}{7y+3}$
Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\frac{7}{3}\}$.

(e) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{5y} + 2$
Definitionsbereich: $x \neq 0,\ y \neq 0$
Multiplikation mit 30
$\dfrac{15}{x} + \dfrac{10}{y} = \dfrac{10}{x} - \dfrac{6}{y} + 60$
$\dfrac{5}{x} = -\dfrac{16}{y} + 60$
$\dfrac{1}{x} = -\dfrac{16}{5y} + 12$
$\Longrightarrow\ x = \dfrac{1}{-\dfrac{16}{5y} + 12} = \dfrac{5y}{60y - 16}$
Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{4}{15}\}$.

(f) $\dfrac{2}{3x} - \dfrac{3}{4y} = \dfrac{3}{2x} + \dfrac{4}{3y} - \dfrac{4}{3}$
Definitionsbereich: $x \neq 0,\ y \neq 0$
Multiplikation mit 12
$\dfrac{8}{x} - \dfrac{9}{y} = \dfrac{18}{x} + \dfrac{16}{y} - 16$
$-\dfrac{10}{x} = \dfrac{25}{y} - 16$
$\dfrac{1}{x} = -\dfrac{5}{2y} + \dfrac{8}{5}$
$\Longrightarrow\ x = \dfrac{1}{-\dfrac{5}{2y} + \dfrac{8}{5}} = \dfrac{10y}{16y - 25}$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{25}{16}\}$.

◄ zurück zur Aufgabe

Aufgabe 30:
Praktisches Vorgehen
Folgender Merksatz ist sicherlich jedem geläufig:
"Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich"
Was bedeutet dies nun konkret bei der Termumformung?
Die Strategie besteht darin, die gesuchte Größe Schritt für Schritt durch Umformungen zu isolieren. Dabei beginnt man mit der "schwächsten Rechenart" (Addition/Subtraktion) zuerst, folgend mit der "Multiplikation/Division", dann mit der "Potenz/Wurzel".
Eine Klammer besitzt die stärkste Wirkung auf eine gesuchte Größe, diese wird erst zum Schluß bearbeitet.

(a) Lösen Sie nach t und a auf.
$v = v_0 - at$

Auflösen nach t
$v = v_0 - at \quad | + at \quad | - v$
$at = v_0 - v \quad | : a$
$t = \dfrac{v_0 - v}{a}$

Auflösen nach a
$t = \dfrac{v_0 - v}{a} \quad | \cdot a \quad | : t$
$a = \dfrac{v_0 - v}{t}$

(b) Lösen Sie nach t auf.
$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad | \cdot 2 \quad | : g$
$t^2 = \dfrac{2s}{g} \quad | \sqrt{\ }$
$t = \pm\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$
Die negative Lösung macht physikalisch keinen Sinn.

(c) Lösen Sie nach a auf.
$m_1 g + m_1 a - m_2 g + m_2 a = 0$
Ausklammern von a und g liefert
$(m_1 - m_2)g + (m_1 + m_2)a = 0 \quad | - (m_1 - m_2)g$
$(m_1 + m_2)a = -(m_1 - m_2)g = (m_2 - m_1)g \quad | : (m_1 + m_2)$
$a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$

(d) Lösen Sie nach x auf.
$m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2} = m_\mathrm{M}(L - x) + m_\mathrm{B}(\dfrac{L}{2} - x)$
Asumultiplizieren der Terme
$m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2} = m_\mathrm{M}L - m_\mathrm{M}x + m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2} - m_\mathrm{B}x$
Ausklammern von x
$m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2} = m_\mathrm{M}L - (m_\mathrm{M} + m_\mathrm{B})x + m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2} \quad | + (m_\mathrm{M} + m_\mathrm{B})x \quad | - m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2}$
$(m_\mathrm{M} + m_\mathrm{B})x = m_\mathrm{M}L \underbrace{- m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2} + m_\mathrm{B}\dfrac{L}{2}}_{=0}$
$(m_\mathrm{M} + m_\mathrm{B})x = m_\mathrm{M}L \quad | : (m_\mathrm{M} + m_\mathrm{B})$
$x = \dfrac{m_\mathrm{M}}{m_\mathrm{M} + m_\mathrm{B}} L$

(e) Lösen Sie nach a auf.
$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g - \dfrac{J}{r^2}a \quad | + \dfrac{J}{r^2}a$
$(m_1 + m_2)a + \dfrac{J}{r^2}a = (m_2 - m_1)g$
Ausklammern von a
$(m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2})a = (m_2 - m_1)g \quad | : (m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2})$
$a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2}} g$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

(f) Lösen Sie nach x auf.

$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_E^2 \quad | \cdot 2$

$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = cx^2 + (m_1+m_2)v_E^2 \quad | -(m_1+m_2)v_E^2$

$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1+m_2)v_E^2 = cx^2 \quad | : c$

$\dfrac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1+m_2)v_E^2}{c} = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1+m_2)v_E^2}{c}}$

(g) Lösen Sie nach p_2, V_1 und κ auf.

$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$

Auflösen nach p_2

$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa \quad | : V_2^\kappa$

$p_1\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = p_2$

Auflösen nach V_1

$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa \quad | : p_1$

$V_1^\kappa = \dfrac{p_2}{p_1}V_2^\kappa \quad |$ hoch $\frac{1}{\kappa}$

$V_1 = V_2\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$

Auflösen nach κ

$p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa \quad | : V_2^\kappa \quad | : p_1$

$\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^\kappa = \dfrac{p_2}{p_1} \quad | \ln$

$\kappa \cdot \ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right) = \ln\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right) \quad | : \ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)$

$\kappa = \dfrac{\ln\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)}$

(h) Lösen Sie nach A_2 auf.

$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\dfrac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) \quad | : \frac{1}{2}\rho v_1^2$

$\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} = \dfrac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \quad | +1$

$\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1 = \dfrac{A_1^2}{A_2^2} \quad | \cdot A_2^2$

$\left(\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1\right)A_2^2 = A_1^2 \quad | : \left(\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1\right)$

$A_2^2 = \dfrac{A_1^2}{\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1} \quad | \sqrt{\ }$

$A_2 = \pm\sqrt{\dfrac{A_1^2}{\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1}} = \pm A_1\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{2\Delta p}{\rho v_1^2} + 1}}$

Die negative Lösung macht physikalisch keinen Sinn.

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 31:

(a) $(x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}) : (x + \frac{1}{2})$
Mit Hilfe des Horner-Schemas

Koeffizienten	1	$\frac{1}{2}$	-2	-1	1	$\frac{1}{2}$	
$x_0 = -\frac{1}{2}$	**1**	**0**	**−2**	**0**	**1**	**0**	$\Longrightarrow f(-\frac{1}{2}) = 0$

Das Ergebnis ist also
$(x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}) : (x + \frac{1}{2}) = x^4 - 2x^2 + 1$

(b) Fehlendes Lineartglied mit Leerplatz auffüllen - der Übersichtlichkeit halber.

$$
\begin{array}{rl}
\big(\;4x^5 - 6x^4 - 3x^3 + 4x^2 \qquad - 1\big) : (x^2 - x - 1) = 4x^3 - 2x^2 - x + 1 \\
\underline{-\,4x^5 + 4x^4 + 4x^3} \\
-\,2x^4 + x^3 + 4x^2 \\
\underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \\
-\,x^3 + 2x^2 \\
\underline{x^3 - x^2 - x} \\
x^2 - x - 1 \\
\underline{-\,x^2 + x + 1} \\
0
\end{array}
$$

Das Ergebnis ist also
$(4x^5 - 6x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 1) : (x^2 - x - 1) = 4x^3 - 2x^2 - x + 1$

(c) $(2x^4 + 2\sqrt{2}\,x^3 - x^2 + (1 - \sqrt{2})\,x + \sqrt{2}) : (x + \sqrt{2})$
Mit Hilfe des Horner-Schemas

Koeffizienten	2	$2\sqrt{2}$	-1	$1-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	
$x_0 = -\sqrt{2}$	**2**	**0**	**−1**	**1**	**0**	$\Longrightarrow f(-\sqrt{2}) = 0$

Das Ergebnis ist also
$(2x^4 + 2\sqrt{2}\,x^3 - x^2 + (1 - \sqrt{2})\,x + \sqrt{2}) : (x + \sqrt{2}) = 2x^3 - x + 1$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 32:
Praktisches Vorgehen
Als sehr hilfreich ist die Darstellung der jeweiligen Intervalle am Zahlenstrahl empfohlen.

(a) $(-2;\ 5] \cap [3;\ \infty) = [3;\ 5]$

(b) $(-2;\ 2] \cup (2;\ 8) \cup [3;\ 9) = (-2;\ 9]$

(c) $(-\infty;\ -3] \cap (-1;\ 4]$ Intervalle schneiden sich nicht

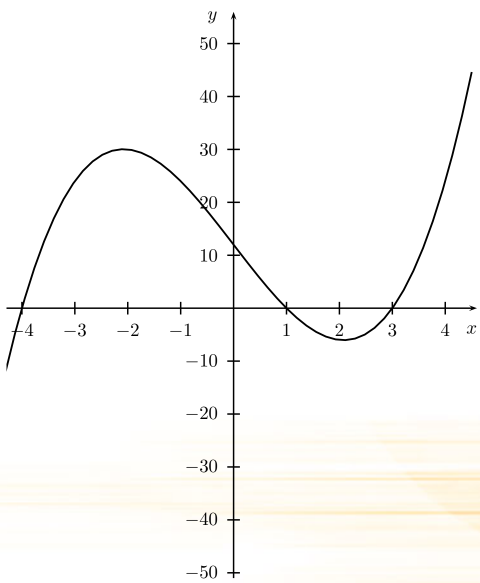
◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 33:
Praktisches Vorgehen
Man unterscheidet grundsätzlich 3 Sorten von Nullstellen
Einfachnullstelle
Schnittpunkt mit der x-Achse und keine waagrechte Tangente
Doppelnullstelle (auch Vierfach-, Sechsfachnullstelle, ...)
Berührpunkt mit der x-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt auf der x-Achse)
Dreifachnullstelle (auch Fünffach-, Siebenfachnullstelle, ...)
Schnittpunkt mit der x-Achse und waagrechter Tangente (Sattelpunkt - Wendepunkt mit waagrechter Tangente)

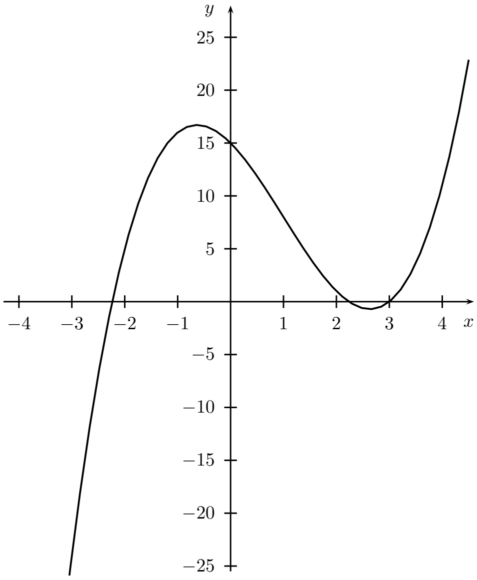
Des Weiteren unterscheidet man zwischen algebraischen und geometrischen Nullstellen:
Algebraische Nullstellen sind Lösungen der Nullstellengleichung - diese können auch mehrfach sein.
Geometrische Nullstellen sind die tatsächlichen Orte, wo das Schaubild die x-Achse schneidet oder berührt.
Beispiel: Eine Doppellösung der Nullstellengleichung liefert zwei algebraische Nullstellen aber nur eine geometrische Nullstelle.
Eine Doppel- und eine Dreifachnullstelle liefern zusammen fünf algebraische Nullstellen aber nur zwei geometrische Nullstellen.
Eine Funktion $f(x)$ vom Grad n kann höchstens n algebraische Nullstellen besitzen. Diese Funktion ist in Linearfaktoren zerlegbar genau dann, wenn die Anzahl der algebraischen Nullstellen genau gleich dem Grad n ist.
$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2, ..., n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ (ganzrationale Funktion)
Die Linearfaktorzerlegung lautet dann
$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, wobei $x_1, x_2, ..., x_n$ algebraische Nullstellen sind.

(a) $f(x) = x^3 - 13x + 12$
$x^3 - 13x + 12 = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = (x + 4)\,(x - 1)\,(x - 3)$

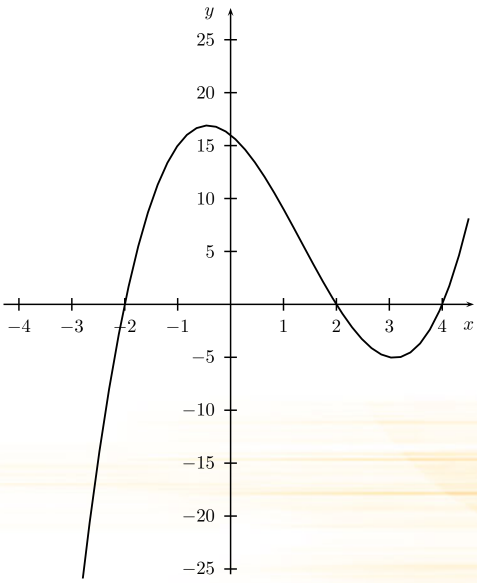


Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

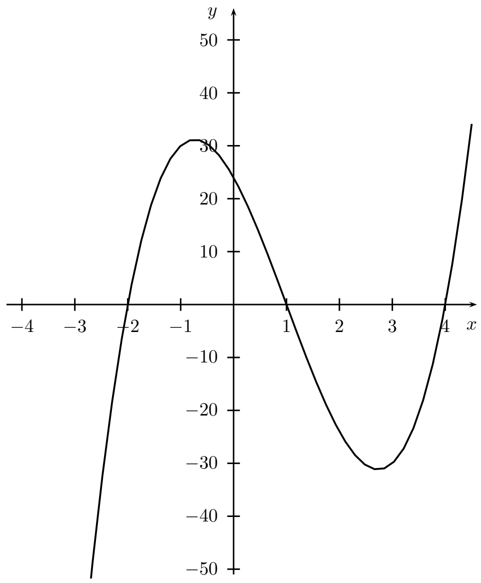
(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$
$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = 3,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = (x - 3)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$



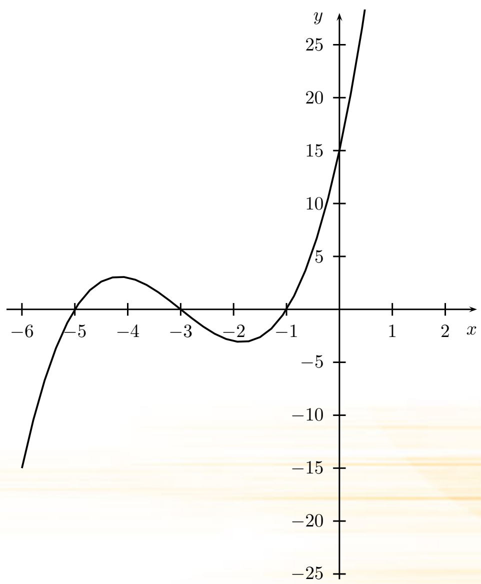
(c) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$
$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = (x + 2)(x - 2)(x - 4)$



(d) $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$
$3x^3 - 9x^2 - 18x + 24 = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = 3\,(x+2)\,(x-1)\,(x-4)$

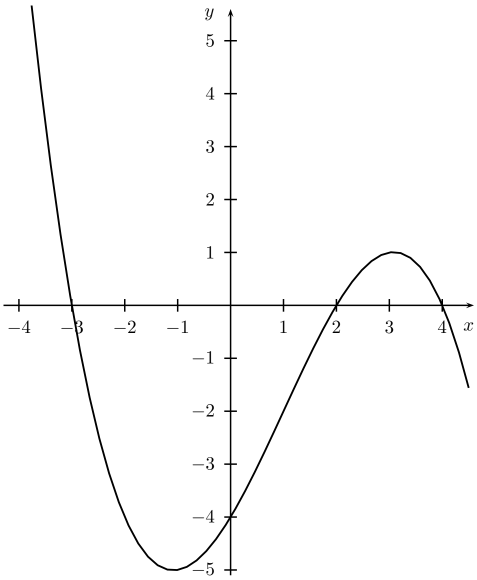


(e) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$
$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = -5,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = (x+5)\,(x+3)\,(x+1)$

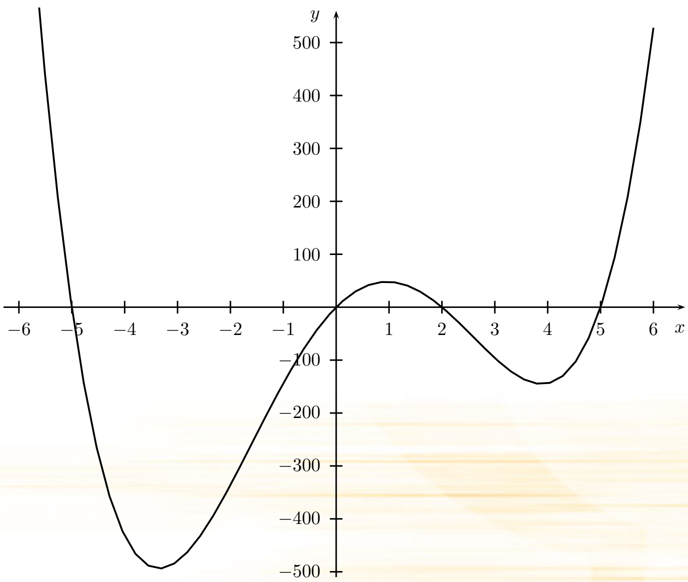


Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

(f) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4$
$-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4 = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = -\frac{1}{6}\,(x+3)\,(x-2)\,(x-4)$



(g) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x$
$2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x = 0$
Diese Gleichung hat die Lösungen
$x_1 = -5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 5$ (Prüfen Sie dies selbständig mit dem Horner-Schema nach.)
Die Linearfaktorzerlegung lautet
$f(x) = 2x\,(x+5)\,(x-2)\,(x-4)$



◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 34:
Praktisches Vorgehen
Die x-Koordinate des Scheitels einer Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$, sonst keine Parabel) liegt bei
$x_s = -\dfrac{b}{2a}$ und die y-Koordinate des Scheitels bei $f(x_s) = y_s = c - \dfrac{b^2}{4a}$

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
$x_s = -\dfrac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 1$
$y_s = f(x_s) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -1$
$S(1/-1)$

(b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{5}{4}$
$x_s = -\dfrac{3}{2 \cdot \frac{3}{4}} = -2$
$y_s = f(x_s) = \frac{3}{4}(-2)^2 + 3(-2) - \frac{5}{4} = -\frac{17}{4}$
$S(-2/-\frac{17}{4})$

(c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
$x_s = -\dfrac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 1$
$y_s = f(x_s) = -\frac{1}{2} + 1 + 4 = \frac{9}{2}$
$S(1/\frac{9}{2})$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 35:
Praktisches Vorgehen
Die x-Koordinate des Scheitels einer Parabel $f(x) = x^2 + bx + c$ liegt bei $x_s = -\frac{b}{2}$ und die y-Koordinate des Scheitels bei $f(x_S) = y_s = c - \frac{b^2}{4}$

(a) $S(0/y_s)$

$$x_s = 0 = -\frac{b}{2} \implies b = 0$$
$$y_s = 3$$

(b) $S(-1/y_s)$

$$x_s = -1 = -\frac{b}{2} \implies b = 2$$
$$y_s = 2$$

(c) $S(\frac{4}{3}/y_s)$

$$x_s = \frac{4}{3} = -\frac{b}{2} \implies b = -\frac{8}{3}$$
$$y_s = \frac{23}{9}$$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 36:
Praktisches Vorgehen
Ausmultiplizieren liefert den Grad und Gradfaktor und ist eine gute Übung, um die Algebra zu wiederholen.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(8-x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 8x$
Grad 3, Gradfaktor $-\frac{1}{2}$
Nullstellen
$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 8$

(b) $f(x) = -2(x^2+1)(2+x)(x-2) = -2x^4 + 6x^2 + 8$
Grad 4, Gradfaktor -2
Nullstellen
$x_1 = -2,\ x_2 = 2$

(c) $f(x) = 3x^2(x^2+4)(x-1) = 3x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 12x^2$
Grad 5, Gradfaktor 3
Nullstellen
$x_{1,2} = 0,\ x_3 = 1$

◂ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 37:
Echt gebrochenrational bedeutet, dass der Zählergrad n kleiner als der Nennergrad m ist.

Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ liefert ein Zählerpolynom $(x-2)(x-3)$
$x_3 = 5$ als Pol mit VZW und $x_4 = -3$ als Pol ohne VZW liefert ein Nennerpolynom $(x-5)(x+3)^2$
Eine mögliche Funktionsgleichung lautet damit
$f(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x+3)^2}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 38:

(a) $f(x) = -2\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-x}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$

Faktorisieren des Nenners

$f(x) = -2\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-1)} = -2\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$

Die Nennernullstelle $x_1 = 1$ hat sich herausgekürzt und damit ist an dieser Stelle eine hebbare Stetigkeitslücke (ein Loch im Schaubild)

An der verbleibenden Nennernullstelle $x_2 = 0$ ist ein Pol mit VZW

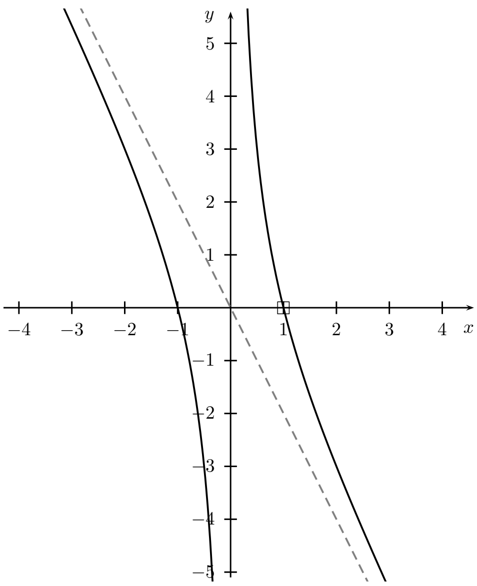
Einfache Nullstellen der Funktion bei $x_3 = -1$ und ($x_4 = 1$ Lücke)

Ausmultiplizieren und kürzen liefert die schiefe Asymptote (Polynomdivision ist damit nicht erforderlich)

$f(x) = -2\dfrac{x^2-1}{x} = -2x + \dfrac{2}{x}$

Somit ist die Gerade $y = -2x$ schiefe Asymptote.

Skizze



Vollbild

<<

>>

<

>

Beenden

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;\ 2\}$

Faktorisieren des Nenners

$f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)(x+2)}$

An den Nennernullstellen $x_{1,2} = \pm 2$ ist jeweils ein Pol mit VZW

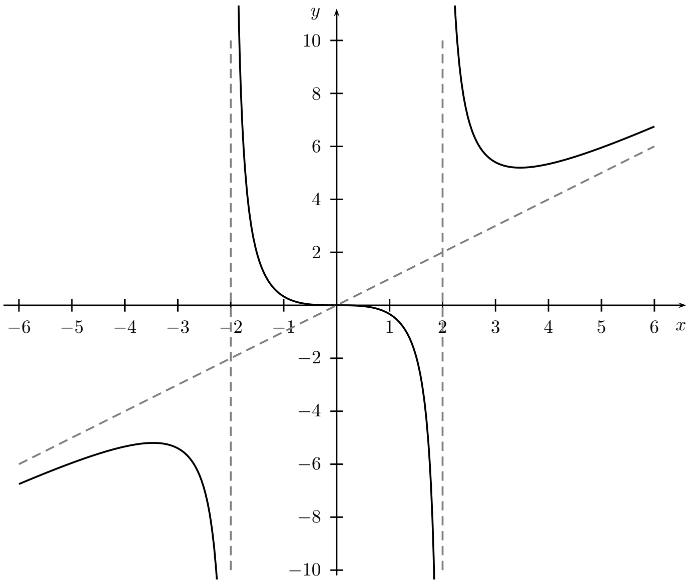
Eine Dreifachnullstelle (Sattelpunkt) der Funktion bei $x_3 = 0$

Polynomdivision liefert die schiefe Asymptote

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$

Somit ist die Gerade $y = x$ schiefe Asymptote.

Skizze



Vollbild

<<

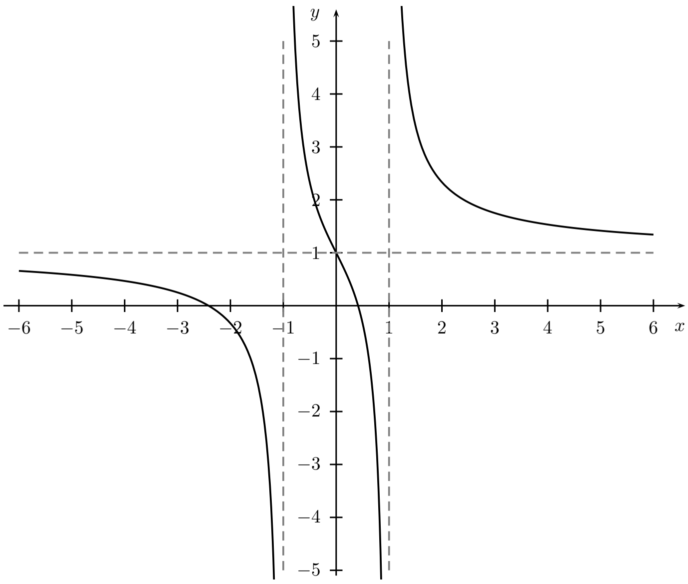
>>

<

>

Beenden

(c) $f(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2-1}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;\ 1\}$
Man sieht bereits, dass $y = 1$ waagrechte Asymptote ist.
Erweitern mit dem Hauptnenner
$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-1} + \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$
Bestimmung der Nullstellen der Funktion
$x^2 + 2x - 1 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$
Zwei einfache Nullstellen
Bestimmung der Nullstellen des Nenners
$x^2 - 1 = 0 \implies x_{3,4} = \pm 1$
Dort ist jeweils ein Pol mit VZW
Skizze



◄ zurück zur Aufgabe

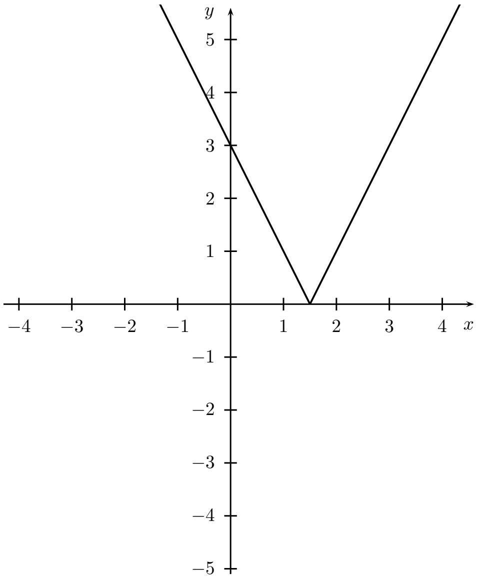
Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

Aufgabe 39:
Praktisches Vorgehen
Die Definition des Betrags lautet:

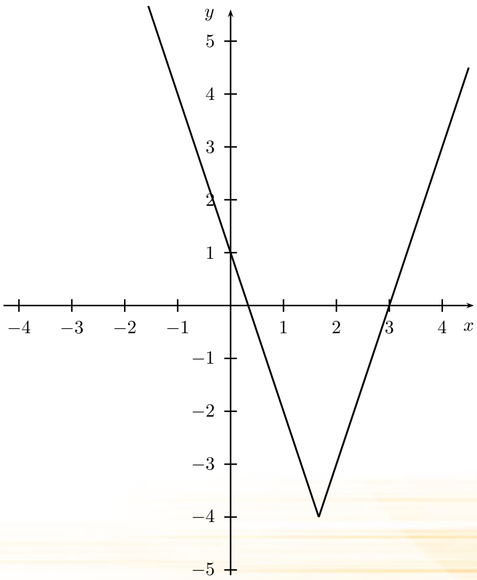
$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

Danach skizziert man die entstehenden Teilfunktionen in ihrem jeweiligen Teilintervall.

(a) $y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{für} \quad 2x - 3 \geq 0 \\ -2x + 3 & \text{für} \quad 2x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 3 & \text{für} \quad x \geq \frac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{für} \quad x < \frac{3}{2} \end{cases}$



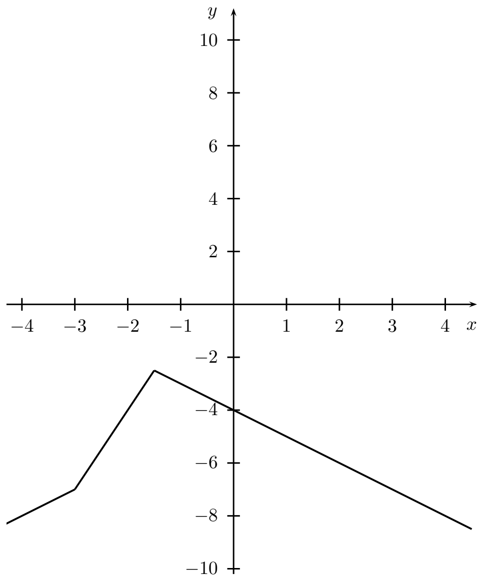
(b) $y = |-3x + 5| - 4 = \begin{cases} -3x + 1 & \text{für} \quad -3x + 5 \geq 0 \\ 3x - 9 & \text{für} \quad -3x + 5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -3x + 1 & \text{für} \quad x \leq \frac{5}{3} \\ 3x - 9 & \text{für} \quad x > \frac{5}{3} \end{cases}$



Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

(c) $y = |-x-3| - |2x+3| - 4$
Diese Funkton besitzt zwei Beträge, der linke Betrag wird Null für $x_1 = -3$, der rechte Betrag wird Null für $x_2 = -\frac{3}{2}$
Das Argument des linken Betrags wird positv für $x \leq -3$,
das Argument des linken Betrags wird negativ für $x > -3$,
das Argument des rechten Betrags wird positiv für $x \geq -\frac{3}{2}$,
das Argument des rechten Betrags wird negativ für $x < -\frac{3}{2}$
Daraus ergibt sich die betragsfreie Darstellung zu

$$y = |-x-3| - |2x+3| - 4 = \begin{cases} -x-4 & \text{für} \quad x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x+2 & \text{für} \quad -3 < x < -\frac{3}{2} \\ x-4 & \text{für} \quad x \leq -3 \end{cases}$$



◂ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

Aufgabe 40:

(a) $f^*(x) = e^x - 3$
$g^*(x) = x^2 - 3$
$h^*(x) = \sin x - 3$

(b) $f^*(x) = e^{x-4}$
$g^*(x) = (x-4)^2$
$h^*(x) = \sin(x-4)$

(c) $f^*(x) = e^{x-2} + 3$
$g^*(x) = (x-2)^2 + 3$
$h^*(x) = \sin(x-2) + 3$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 41:

(a) Es muss gelten für alle h:
$f(a+h) = f(a-h)$ mit $a = 2$ und $f(x) = x^2 - 4x + 1$
$f(2+h) = f(2-h)$
$(2+h)^2 - 4(2+h) + 1 = (2-h)^2 - 4(2-h) + 1$
Binomische Formeln ausmultiplizieren
$4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 1 = 4 - 4h + h^2 - 8 + 4h + 1$
Zusammenfassen
$h^2 - 3 = h^2 - 3$ immer erfüllt.

(b) Es muss gelten für alle h:
$\frac{1}{2}(f(a+h) + f(a-h)) = b$ mit $a = 1$ und $b = 1$ und $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
$\frac{1}{2}(f(1+h) + f(1-h)) = 1$
$f(1+h) + f(1-h) = 2$
$(1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 3(1+h) + (1-h)^3 - 3(1-h)^2 + 3(1-h) = 2$
Potenzen ausmultiplizieren $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$1+3h+3h^2+h^3-3(1+2h+h^2)+3+3h+1-3h+3h^2-h^3-3(1-2h+h^2)+3-3h = 2$
$1+3h+3h^2+h^3-3-6h-3h^2+3+3h+1-3h+3h^2-h^3-3+6h-3h^2+3-3h = 2$
Zusammenfassen der linken Seite
$2 = 2$ immer erfüllt

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 42:

(a) $f^*(x) = 2b - f(x)$ mit $b = 2$
$f^*(x) = 4 - f(x)$
$f^*(x) = 4 - (x^2 + 2x + 3) = -x^2 - 2x + 1$

(b) $f^*(x) = f(2a - x)$ mit $a = -1$
$f^*(x) = f(-2 - x)$
$f^*(x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3 = x^2 + 2x + 3$

(c) $f^*(x) = 2b - f(2a - x)$ mit $a = 2$ und $b = -2$
$f^*(x) = -4 - f(4 - x)$
$f^*(x) = -4 - ((4 - x)^2 + 2(4 - x) + 3) = -x^2 + 10x - 31$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 43:
Praktisches Vorgehen
Die **gemischtquadratische Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, sonst nicht quadratisch) hat die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die **gerade quadratische Gleichung** $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$, sonst nicht quadratisch) hat die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ für $ac < 0$
(a und c haben unterschiedliches Vorzeichen) und ist unlösbar für $ac > 0$ (a und c haben gleiches Vorzeichen)

Die **quadratische Gleichung ohne Absolutglied** $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$, sonst nicht quadratisch) hat die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

(a) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$
Gemischtquadratische Gleichung
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN = 4 lässt die Brüche verschwinden und liefert
$x^2 - 2x - 3 = 0$ Mitternachtsformel liefert
$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \implies x_1 = 3,\ x_2 = -1$

(b) $-\frac{2}{7}x^2 + 3 = 0$
Gerade quadratische Gleichung
Auflösen nach x^2 liefert
$x^2 = \frac{21}{2} \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{21}{2}}$

(c) $4x^2 - 2x = 0$
Quadratische Gleichung ohne Absolutglied
Ausklammern von x liefert mit dem Satz vom Nullprodukt
$x(4x-2) = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 44:
Praktisches Vorgehen
Eine quadratische Gleichungen besitzt
keine Lösung, wenn der Radikand (Diskriminante) $D = b^2 - 4ac < 0$
eine Lösung, wenn der Radikand (Diskriminante) $D = b^2 - 4ac = 0$
zwei Lösungen, wenn der Radikand (Diskriminante) $D = b^2 - 4ac > 0$
$ax^2 - 4x + 2 = 0$

Bestimmung der Diskriminante
$D = 16 - 8a$
keine Lösung, wenn $16 - 8a < 0$, also $a > 2$
eine Lösung, wenn $16 - 8a = 0$, also $a = 2$
zwei Lösungen, wenn $16 - 8a > 0$, also $a < 2$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 45:
Praktisches Vorgehen
Wählen Sie eine geeignete Substitution und lösen Sie die daraus entstehende quadratische Gleichung mit Hilfe der Mitternachtsformel. Danach substituieren Sie wieder zurück.

(a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
Substitution: $x^2 = z$
$z^2 - 13z + 36 = 0$
$z_1 = 4,\ z_2 = 9$
Rücksubstitution
$x^2 = z_1 = 4 \implies x_{1,2} = \pm 2$
$x^2 = z_2 = 9 \implies x_{3,4} = \pm 3$

(b) $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$
Substitution: $x^2 = z$
$9z^2 - 85z + 36 = 0$
$z_1 = \frac{4}{9},\ z_2 = 9$
Rücksubstitution
$x^2 = z_1 = \frac{4}{9} \implies x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$
$x^2 = z_2 = 9 \implies x_{3,4} = \pm 3$

(c) $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$
Substitution: $x^4 = z$
$16z^2 - 257z + 16 = 0$
$z_1 = \frac{1}{16},\ z_2 = 16$
Rücksubstitution
$x^4 = z_1 = \frac{1}{16} \implies x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$
$x^4 = z_2 = 16 \implies x_{3,4} = \pm 2$

(d) $\left(x^3 + 2\right)^2 + 3\left(x^3 + 2\right) - 18 = 0$
Substitution: $x^3 + 2 = z$
$z^2 + 3z - 18 = 0$
$z_1 = -6,\ z_2 = 3$
Rücksubstitution
$x^3 + 2 = z_1 = -6 \implies x^3 = -8 \implies x_1 = -2$
$x^3 + 2 = z_2 = 3 \implies x^3 = 1 \implies x_2 = 1$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 46:

(a) $\frac{8}{2x-4} + \frac{24}{2x+4} = \frac{\frac{9}{2}}{(x-2)(x+2)}$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
Die obige Bruchgleichung umgeschrieben
$\frac{4}{x-2} + \frac{12}{x+2} = \frac{9}{2(x-2)(x+2)}$
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= 2(x-2)(x+2) \neq 0$ liefert
$8(x+2) + 24(x-2) = 9 \iff 8x + 16 + 24x - 48 = 9$
$32x = 41$
$x_1 = \frac{41}{32} \in D$

(b) $\frac{3x}{x+1} + \frac{5}{x} = 3$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= x(x+1) \neq 0$ liefert
$3x^2 + 5(x+1) = 3x(x+1) \iff 3x^2 + 5x + 5 = 3x^2 + 3x$
$2x = -5$
$x_1 = -\frac{5}{2} \in D$

(c) $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{12}{x^2-4}$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= (x-2)(x+2) \neq 0$ liefert
$3(x-2) + 2(x+2) = -12 \iff 3x - 6 + 2x + 4 = -12$
$5x = -10$
$x_1 = -2 \notin D$
Keine Lösung

(d) $\frac{b(a-2x)}{ax} + \frac{a}{b} = \frac{a(a-x)}{bx}$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Forderung $a \neq 0,\ b \neq 0$
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= abx \neq 0$ liefert
$b^2(a-2x) + a^2x = a^2(a-x) \iff ab^2 - 2b^2x + a^2x = a^3 - a^2x$
$x(-2b^2 + 2a^2) = a^3 - ab^2$
$2x(a^2 - b^2) = a(a^2 - b^2)$

1. Fall: $a^2 - b^2 = 0 \iff |a| = |b| \neq 0$
$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \in D$

2. Fall: $a^2 - b^2 \neq 0 \iff |a| \neq |b|$ und $a \neq 0,\ b \neq 0$
$x_1 = \frac{a}{2} \in D$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 47:
Praktisches Vorgehen
Mit der Definition des Betrags ergibt dies Fallunterscheidungen. Diese löst man separat und vereinigt deren Lösungsmengen zur Gesamtlösung.

(a) $|x| + 3x = 8$

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$4x = 8 \implies x_1 = 2 \in D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$2x = 8 \implies x_2 = 4 \notin D_2$

Die Gesamtlösung ist: $x_1 = 2$

(b) $|2x - 1| + 1 = |6 - x|$

Diese Gleichung besitzt zwei Beträge, der linke Betrag wird Null für $x_1 = \frac{1}{2}$, der rechte Betrag wird Null für $x_2 = 6$
Das Argument des linken Betrags wird positv für $x \geq \frac{1}{2}$,
das Argument des linken Betrags wird negativ für $x < \frac{1}{2}$,
das Argument des rechten Betrags wird positiv für $x \leq 6$,
das Argument des rechten Betrags wird negativ für $x > 6$
Daraus ergeben sich die folgende Fallunterscheidungen

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\}$
$-(2x - 1) + 1 = 6 - x \iff -2x + 1 + 1 = 6 - x$
$x_1 = -4 \in D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 6\}$
$2x - 1 + 1 = 6 - x \iff 3x = 6$
$x_2 = 2 \in D_2$

3. Fall: $D_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$
$2x - 1 + 1 = -(6 - x) \iff 2x = -6 + x$
$x_3 = -6 \notin D_3$

Die Gesamtlösung ist: $x_1 = -4,\ x_2 = 2$

(c) $|x + 2| - 3 = 2 \cdot |4 - x|$

Diese Gleichung besitzt zwei Beträge, der linke Betrag wird Null für $x_1 = -2$, der rechte Betrag wird Null für $x_2 = 4$
Das Argument des linken Betrags wird positv für $x \geq -2$,
das Argument des linken Betrags wird negativ für $x < -2$,
das Argument des rechten Betrags wird positiv für $x \leq 4$,
das Argument des rechten Betrags wird negativ für $x > 4$
Daraus ergeben sich die folgende Fallunterscheidungen

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
$-(x + 2) - 3 = 2(4 - x) \iff -x - 5 = 8 - 2x$
$x_1 = 13 \notin D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$
$x + 2 - 3 = -2(4 - x) \iff x - 1 = -8 + 2x$
$x_2 = 7 \in D_2$

3. Fall: $D_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
$x + 2 - 3 = 2(4 - x) \iff x - 1 = 8 - 2x$
$x_3 = 3 \in D_3$

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Die Gesamtlösung ist: $x_1 = 3, \; x_2 = 7$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

Aufgabe 48:

(a) $2\sqrt{x-1} = -4 + 2x$
Definitionsbereich: $x \geq 1$
Quadrieren der Gleichung liefert
$4(x-1) = (-4+2x)^2$
Zusammenfassen unter Berücksichtigung der Binomischen Formel
$4x - 4 = 16 - 16x + 4x^2$
Sortieren
$4x^2 - 20x + 20 = 0 \quad | \ : 4$
$x^2 - 5x + 5 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2}$
$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = 3,62 \in D$
$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1,38 \in D$
Probe mit x_1 ist erfüllt.
Probe mit x_2 ist nicht erfüllt.

(b) $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{1-x}$
Definitionsbereich: $x \geq -1 \wedge x \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1$
Quadrieren der Gleichung liefert
$x + 1 = 4(1-x)$
Zusammenfassen
$x + 1 = 4 - 4x \quad | \ +4x \quad | \ -1$
$5x = 3 \implies x_1 = \frac{3}{5} \in D$
Probe mit x_1 ist erfüllt.

◄ zurück zur Aufgabe

Lösungen
Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 49:

(a) $5\sin x - 2 = 3$
Isolieren des Sinus-Terms
$\sin x = 1$
Die Lösungen sind
$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

(b) $2\cos(2x-3) = -3$
Isolieren des Cosinus-Terms
$\cos(2x-3) = -\frac{3}{2}$
Diese Gleichung ist unlösbar, da der Cosinus eines beliebigen Arguments immer zwischen -1 und $+1$ liegt.

(c) $\sin x - \cos x = 0$
$\sin x = \cos x \quad | \; : \cos x \neq 0$
$\tan x = 1$
Die Lösungen sind
$x_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

(d) $\sin^2 x + 2\sin x = -1$
Die Substitution $\sin x = z$ liefert die quadratische Gleichung
$z^2 + 2z + 1 = 0 \implies z_{1,2} = -1$
Rücksubstitution
$\sin x = -1$
Die Lösungen sind
$x_k = 3\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 50:

(a) $e^{3x} = 2$
Logarithmieren
$3x = \ln 2 \implies x_1 = \frac{1}{3}\ln 2 \approx 0,23$

(b) $e^{2x-1} = 4$
Logarithmieren
$2x - 1 = \ln 4 \implies x_1 = \frac{1}{2}(\ln 4 + 1) \approx 1,19$

(c) $2e^{x^2} = 6$
Isolieren des e-Terms
$e^{x^2} = 3$
Logarithmieren
$x^2 = \ln 3 \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{\ln 3} \approx \pm 1,05$

(d) $-3e^{-x+5} = 3$
Isolieren des e-Terms
$e^{-x+5} = -1$ nicht lösbar, da $e^{g(x)} > 0$

(e) $e^x(1 - e^x) = 0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt
$e^x = 0$ nicht lösbar
$1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \implies x_1 = 0$

(f) $2e^{2x} - e^x = 0$
Ausnutzen der Potenzgesetze
$2(e^x)^2 - e^x = 0$
Substitution $z = e^x$ liefert folgende quadratische Gleichung
$2z^2 - z = 0 \iff z(2z - 1) = 0$
Satz vom Nullprodukt liefert
$z_1 = 0$ Rücksubstitution $e^x = 0$ keine Lösung
$z_2 = \frac{1}{2}$ Rücksubstitution $e^x = \frac{1}{2} \implies x_1 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 = -0,693$

◀ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 51:

(a) $\ln(2x) = -2$
Definitionsmenge: $2x > 0 \implies x > 0$
Erheben zur e-ten Potenz (Exponieren zur Basis e)
$e^{\ln(2x)} = e^{-2}$
Anwenden der Logarithmen- und Potenzgesetze
$2x = \frac{1}{e^2} \implies x_1 = \frac{1}{2e^2} \approx 6,77 \cdot 10^{-2}$

(b) $\ln(3 - x) = 1$
Definitionsmenge: $x < 3$
$3 - x = e \implies x_1 = 3 - e \approx 0,28$

(c) $\ln(e^x) = -3$
Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R}$
Anwenden der Logarithmengesetze
$x = -3$

(d) $\ln x - 2\ln(x^2) = 3$
Definitionsmenge: $x > 0$
Anwenden der Logarithmengesetze
$\ln x - 4\ln x = 3 \iff -3\ln x = 3$
$\ln x = -1 \implies x_1 = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$

(e) $\ln x(\ln x - 1) = 0$
Definitionsmenge: $x > 0$
Satz vom Nullprodukt
$\ln x = 0 \implies x_1 = e^0 = 1$
$\ln x = 1 \implies x_2 = e$

(f) $\ln(\frac{1}{x-1}) = 2$
Definitionsmenge: $x > 1$
$\frac{1}{x-1} = e^2 \iff 1 = e^2(x-1)$
$1 = e^2x - e^2$
Auflösen nach x
$e^2x = 1 + e^2 \implies x_1 = \frac{1+e^2}{e^2} \approx 1,14$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 52:
Praktisches Vorgehen
Bei Ungleichungen ist darauf zu achten, dass sich bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl das Ungleichungszeichen umdreht.
Bei Bruchungleichungen ist bei Durchmultiplizieren des Nenners auf dessen Vorzeichen zu achten und eine Fallunterscheidung notwendig.

(a) $4x - 3 < 3\,(x + 1)$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}$
$4x - 3 < 3x + 3$
$x < 6$

(b) $x^2 - 15 < (x + 5)^2$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}$
$x^2 - 15 < x^2 + 10x + 25$
$-10x < 40$
$x > 4$

(c) $2\left(x^2 - 16\right) > 2x^2 + 14x - 4$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}$
$2x^2 - 32 > 2x^2 + 14x - 4$
$-14x > 28$
$x < -2$

(d) $\dfrac{2x - 2}{2x + 2} \leq 2$
Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ (Nenner ist negativ)
$2x - 2 \geq 2(2x + 2) \iff 2x - 2 \geq 4x + 4$
$-2x \geq 6$
$x \leq -3 \in D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ (Nenner ist positiv)
$2x - 2 \leq 2(2x + 2) \iff 2x - 2 \leq 4x + 4$
$-2x \leq 6$
$x \geq -3$ dies geschnitten mit dem Definitionsbereich D_2
$x > -1$

Die Gesamtlösung ist: $(-1, \infty) \cup (-\infty, -3]$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 53:
Praktisches Vorgehen
Die Lösung einer quadratischen Ungleichung erhält man am einfachsten mit Hilfe der sogenannten grafischen Methode. Dazu erzeugt man auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens eine Null (durch Addition/Subtraktion der Terme der rechten Seite). Die neue linke Seite definiert man als eine quadratische Funktion $f(x)$ (also eine Parabel). Diese ist sehr leicht zu skizzieren, indem man die möglichen Nullstellen und den Scheitel berechnet. Danach entscheidet man, welcher x-Achsenbereich die Ungleichung erfüllt.

(a) $x^2 - 3x - 4 > 0$
Man definiert die Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ (nach oben geöffnet) und sucht denjenigen Bereich, bei dem die Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse liegt. Hierzu bestimmt man die Nullstellen $f(x) = 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_1 = -1,\ x_2 = 4$
Die Lösung obiger Ungleichung ist damit:
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid (-\infty, -1) \cup (4, \infty)\}$

(b) $\frac{1}{2}x^2 + x \leq 4$
Umschreiben liefert
$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 \leq 0$
Man definiert die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ (nach oben geöffnet) und sucht denjenigen Bereich, bei dem die Funktion $f(x)$ unterhalb oder auf der x-Achse liegt. Hierzu bestimmt man die Nullstellen $f(x) = 0$
$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$
$x_1 = -4,\ x_2 = 2$
Die Lösung obiger Ungleichung ist damit:
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid [-4, 2]\}$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 54:

$$\begin{array}{llr}
[1] & 2x_1 - x_2 \qquad = & 0 \\
[2] & x_1 + 2x_2 + x_3 = & 2 & [1] - 2 \cdot [2] \\
[3] & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = & 1 & 3 \cdot [2] - [3]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
[4] & 2x_1 - x_2 \qquad = & 0 \\
[5] & -5x_2 - 2x_3 = & -4 \\
[6] & 4x_2 - x_3 = & 5 & 4 \cdot [5] + 5 \cdot [6]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
[7] & 2x_1 - x_2 \qquad = & 0 \\
[8] & -5x_2 - 2x_3 = & -4 \\
[9] & -3x_3 = & 9
\end{array}$$

$x_3 = -3 \rightarrow x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 1$
Das LGS ist eindeutig lösbar mit
$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 55:

$$\begin{array}{lrcl}
[1] & x_1 + x_2 + x_3 &=& 1 & \\
[2] & 2x_1 - x_2 + 4x_3 &=& 5 & 2\cdot[1]-[2] \\
[3] & x_1 + 4x_2 - x_3 &=& -2 & [1]-[3] \\
[4] & x_1 + x_2 + x_3 &=& 1 & \\
[5] & 3x_2 - 2x_3 &=& -3 & \\
[6] & -3x_2 + 2x_3 &=& 3 & [5]+[6] \\
[7] & x_1 + x_2 + x_3 &=& 1 & \\
[8] & 3x_2 - 2x_3 &=& -3 & \\
[9] & 0x_3 &=& 0 &
\end{array}$$

$x_3 = 3\alpha \to x_2 = -1 + 2\alpha \to x_1 = 2 - 5\alpha$
Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit
$x_1 = 2 - 5\alpha$, $x_2 = -1 + 2\alpha$, $x_3 = 3\alpha$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 56:

$$
\begin{array}{lrcl}
[1] & 2x_1 - \ \ 4x_2 + \ \ x_3 &=& -3 & \\
[2] & x_1 + \ \ 6x_2 - 4x_3 &=& 0 & [1] - 2 \cdot [2] \\
[3] & 4x_1 - \ \ 8x_2 + 2x_3 &=& -5 & 2 \cdot [1] - [3]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
[4] & 2x_1 - \ \ 4x_2 + \ \ x_3 &=& -3 \\
[5] & -16x_2 + 9x_3 &=& -3 \\
[6] & 0x_3 &=& -1
\end{array}
$$

Widerspruch in Zeile [6]!
Das LGS hat keine Lösung.

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 57:
Es reichen zwei der drei Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\begin{array}{llrl}
[1] & 4x_1 - 3x_2 = & 5 & \\
[2] & x_1 + x_2 = & 3 & [1] - 4 \cdot [2] \\
[3] & 6x_1 - x_2 = & 11 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
[4] & 4x_1 - 3x_2 = & 5 \\
[5] & -7x_2 = & -7 \\
[6] & 6x_1 - x_2 = & 11
\end{array}$$

$x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2$
Probe mit dritter Zeile liefert: $6 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 11$ ist wahr.
Das LGS ist eindeutig lösbar mit
$x_1 = 2$, $x_2 = 1$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Aufgabe 58:
Es reichen drei der vier Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\begin{array}{lrrrrl}
[1] & x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 = & 4 & \\
[2] & 2x_1 + & 4x_2 - & 6x_3 = & 8 & 2\cdot[1]-[2] \\
[3] & 3x_1 + & 6x_2 - & 9x_3 = & 12 & 3\cdot[1]-[3] \\
[4] & -5x_1 - & 10x_2 + & 15x_3 = & -20 & \\
\\
[5] & x_1 + & 2x_2 - & 3x_3 = & 4 & \\
[6] & & & 0x_3 = & 0 & \\
[7] & & & 0x_3 = & 0 & \\
[8] & -5x_1 - & 10x_2 + & 15x_3 = & -20 &
\end{array}$$

$x_3 = 3\alpha \to x_2 = \beta \to x_1 = 4 + 3\alpha - 2\beta$
Probe mit letzter Zeile liefert:
$-5(4 + 3\alpha - 2\beta) - 10\beta + 15\alpha = -20$
ist wahr.
Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit
$x_1 = 4 + 3\alpha - 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 59:
Es reichen drei der vier Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\begin{array}{llrl}
[1] & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = & 5 & \\
[2] & -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = & -2 & 2\cdot[1]+[2] \\
[3] & 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = & 1 & 3\cdot[1]-[3] \\
[4] & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = & 1 & \\
[5] & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = & 5 & \\
[6] & 0x_3 = & 8 & \\
[7] & 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = & 1 & \\
[8] & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = & 1 &
\end{array}$$

Widerspruch in Zeile [6]! (Jede weitere Rechnung erspart sich)

Das LGS hat keine Lösung.

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden

Lösungen

Aufgabe 60:
Es kann keine vollständige Dreiecksgestalt erreicht werden. Es kann keine eindeutige Lösung geben.

$$\begin{array}{lrcl}
[1] & x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 & = & 5 \\
[2] & 2x_1 - x_2 - 6x_3 & = & -2 \qquad 2\cdot[1]-[2]
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
[3] & x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 & = & 5 \\
[4] & -5x_2 + 20x_3 + 2x_4 & = & 8
\end{array}$$

$x_4 = 5\alpha \rightarrow x_3 = 5\beta \rightarrow x_2 = -\frac{12}{5} + 2\alpha + 20\beta \rightarrow x_1 = -\frac{11}{5} + \alpha + 25\beta$
Das LGS hat unendlich viele Lösungen:
$x_1 = -\frac{11}{5} + \alpha + 25\beta,\ x_2 = -\frac{12}{5} + 2\alpha + 20\beta,\ x_3 = 5\beta,\ x_4 = 5\alpha$

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<<
>>
<
>
Beenden

Lösungen

Aufgabe 61:
Es kann keine vollständige Dreiecksgestalt erreicht werden. Es kann keine eindeutige Lösung geben.

$$\begin{array}{lrl}
[1] & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 & \\
[2] & -8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -3 & 2 \cdot [1] + [2] \\
[3] & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 & \\
[4] & 0x_3 = -3 &
\end{array}$$

Widerspruch in Zeile [4]!
Das LGS hat keine Lösung.Vektoren

◄ zurück zur Aufgabe

Vollbild
<< >>
< >
Beenden